МЕХАНИКА
MECHANICS




УДК 539.3
https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-1-23-35

Научная статья

Связанная осесимметричная задача термоэлектроупругости для круглой жестко закрепленной пластины


EDN: DUOERK

Д.А. Шляхин, **Е.В. Савинова**✉
Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация
 ✉ slenax@yandex.ru

Аннотация
Введение. Для описания работы температурных пьезокерамических конструкций используется теория термоэлектроупругости, в которой математическая модель сформулирована в виде системы несамосопряженных дифференциальных уравнений. Сложность ее интегрирования в общем виде приводит к исследованию задач в несвязанной постановке. Это не позволяет оценить эффект влияния электроупругих полей на температурное поле. В литературе не представлены исследования данных задач в трехмерной связанной постановке, в которых были бы построены замкнутые решения. При этом проведение именно таких исследований позволяет понять картину взаимодействия механических, тепловых и электрических полей в конструкции. Поэтому целью представленного исследования стало построение нового замкнутого решения связанной задачи для пьезокерамической круглой жестко закрепленной пластины, позволяющее качественно оценить взаимное влияние термоэлектроупругих полей в данной электроупругой системе.
Материалы и методы. Объектом исследования является пьезокерамическая пластина. Рассматривается случай нестационарного изменения температуры на ее верхней лицевой поверхности при учете конвекционного теплообмена нижней плоскости с окружающей средой (граничные условия 1 и 3 рода). Индуцируемое в результате образования температурных деформаций электрическое поле фиксируется путем подключения электродированных поверхностей к измерительному прибору. Задача термоэлектроупругости включает уравнения равновесия, электростатики и нестационарное гиперболическое уравнение теплопроводности. Она решается обобщенным методом конечного биортогонального преобразования, позволяющего построить замкнутое решение несамосопряженной системы уравнений.
Результаты исследования. Построено новое замкнутое решение связанной осесимметричной задачи термоэлектроупругости для круглой пластины, выполненной из пьезокерамического материала, являющееся более точным, по сравнению с тем, которое было разработано при решении задач в несвязанной постановке.
Обсуждение и заключение. Полученное решение начально-краевой задачи позволяет определить температурное, электрическое и упругое поля, индуцируемые в пьезокерамическом элементе при произвольном температурном осесимметричном внешнем воздействии. Проведенные расчеты дают возможность рассчитать размеры сплошных электродов, которые позволяют повысить функциональные возможности пьезокерамических преобразователей. Численный анализ результатов помогает выявить новые связи между характером внешнего температурного воздействия, процессом деформирования и величиной электрического поля в пьезокерамической конструкции. Это дает возможность обосновать рациональную программу экспериментов при их проектировании и значительно сократить объем натурных исследований.

Ключевые слова: задача термоэлектроупругости, связанная осесимметричная задача, жестко закрепленная пластина, биортогональные конечные интегральные преобразования

Благодарности. Авторы выражают благодарность рецензентам за проведенную работу, которая позволила повысить качественный уровень статьи.

Для цитирования. Шляхин Д.А., Савинова Е.В. Связанная осесимметричная задача термоэлектроупругости для круглой жестко закрепленной пластины. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2024;24(1):23–35. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-1-23-35

Research article

Coupled Axisymmetric Thermoelectroelasticity Problem for a Round Rigidly Fixed Plate

Dmitriy A. Shlyakhin, Elena V. Savinova ✉
Samara State Technical University, Samara, Russian Federation
✉ slenax@yandex.ru

Abstract
Introduction. To describe the operation of temperature piezoceramic structures, the theory of thermoelectroelasticity is used, in which the mathematical model is formulated as a system of nonself-adjoint differential equations. The complexity of its integration in general leads to the study of problems in an unrelated formulation. This does not allow us to evaluate the effect of electroelastic fields on temperature. The literature does not present studies on these problems in a three-dimensional coupled formulation in which closed solutions would be constructed. At the same time, conducting such studies allows us to understand the interaction picture of mechanical, thermal and electric fields in a structure. To solve this problem, a new closed solution of a coupled problem for a piezoceramic round rigidly fixed plate has been constructed in this research. It provides for qualitative assessment of the cross impact of thermoelectroelastic fields in this electroelastic system.
Materials and Methods. The object of the study is a piezoceramic plate. The case of unsteady temperature change on its upper front surface is considered, taking into account the convection heat exchange of the lower plane with the environment (boundary conditions of the 1st and 3rd kind). The electric field induced as a result of the thermal strain generation is fixed by connecting the electrodated surfaces to the measuring device. The thermoelectroelasticity problem includes the equations of equilibrium, electrostatics, and the unsteady hyperbolic heat equation. It is solved by the generalized method of finite biorthogonal transformation, which makes it possible to construct a closed solution of a nonself-adjoint system of equations.
Results. A new closed solution of the coupled axisymmetric thermoelectroelasticity problem for a round plate made of piezoceramic material was constructed.
Discussion and Conclusion. The obtained solution to the initial boundary value problem made it possible to determine the temperature, electric and elastic fields induced in a piezoceramic element under arbitrary temperature axisymmetric external action. The calculations performed provided determining the dimensions of solid electrodes, which made it possible to increase the functionality of piezoceramic transducers. Numerical analysis of the results enabled us to identify new connections between the nature of external temperature action, the deformation process, and the value of the electric field in a piezoceramic structure. This can validate a proper program of experiments under their designing and significantly reduce the volume of field studies.

Keywords: thermoelectroelasticity problem, coupled problem, round piezoceramic rigidly fixed plate, biorthogonal finite integral transformations

Acknowledgements. The authors would like to thank the reviewers for the work done, which made it possible to improve the quality of the article.

For citation. Shlyakhin DA, Savinova EV. Coupled Axisymmetric Thermoelectroelasticity Problem for a Round Rigidly Fixed Plate. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2024;24(1):23–35. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-1-23-35

Введение. Для повышения функциональных возможностей пьезокерамических датчиков [1–3], основанных на взаимном влиянии термоэлектроупругих полей, используются различные математические модели. Для более точного учета эффекта связанности данных полей возникает необходимость в построении замкнутых решений. Для решения систем исходных несамосопряженных дифференциальных уравнений применяются некоторые упрощения. Таким образом, задачи могут быть рассмотрены в несвязанной постановке, либо в задачах рассматриваются и анализируются элементы, у которых имеется вырожденная геометрия. В [4, 5] рассматривается несвязанная стационарная задача для длинного электроупругого цилиндра, а работа [6] посвящены анализу тепловых напряжений в полой сфере. Исследования [7, 8] связаны с определение температурного поля в пьезокерамической оболочке и круглой пластине при решении несвязанных задач. Связанные динамические задачи для однородного пьезокерамического слоя, а также динамические задачи в

связанной постановке для градиентно–неоднородного пьезокерамического слоя рассматривались в трудах [9, 10], в статьях [11, 12] анализировались поля в неограниченной среде. В работах [13, 14] рассматривается длинный полый цилиндр и анализируются термоэлектроупругие поля.

В настоящее время в литературе не описаны результаты построения замкнутых решений упомянутых нестационарных задач в трехмерной связанной постановке. Поэтому в настоящей работе рассмотрена круглая пластина, выполненная из пьезокерамического состава и имеющая жесткое закрепление, для которой получено новое замкнутое решение задачи термоэлектроупругости. Использование ограничения на скорость изменения температуры на ее лицевой поверхности [10] позволяет не включать инерционные характеристики исследуемой системы и применять уравнения равновесия в расчетных соотношениях.

Материалы и методы. В процессе решения использовали обобщенное конечное биортогональное преобразование, позволяющее понизить размерность несамосопряженной системы уравнений и, существенно упрощая исследования в пространстве изображений, построить замкнутое решение.

Математическая модель. Рассмотрим некоторую область $\Omega:\{0 \le r_* \le b,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z_* \le h^*\}$, которую в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z_*) занимает круглая в плане пьезокерамическая сплошная пластина. Для рассматриваемой задачи можно использовать произвольные температурные граничные условия. Однако для определенности решения на верхней $(z_* = 0)$ лицевой поверхности учитывается изменение температуры $\omega_1^*(r_*, t_*)$ при заданной температуре внешней среды ϑ^* на нижней $(z_* = h^*)$ плоскости (t_* — время). Цилиндрическая теплоизолированная поверхность жестко закреплена: отсутствует радиальная компонента вектора перемещений и угол поворота, а в вертикальной плоскости зафиксирована ее нижняя часть. Нижняя плоскость рассматриваемой круглой пластины имеет заземление. Лицевые электродированные плоскости пластины подключены к измерительному прибору. Расчетная схема пластины представлена на рис. 1.

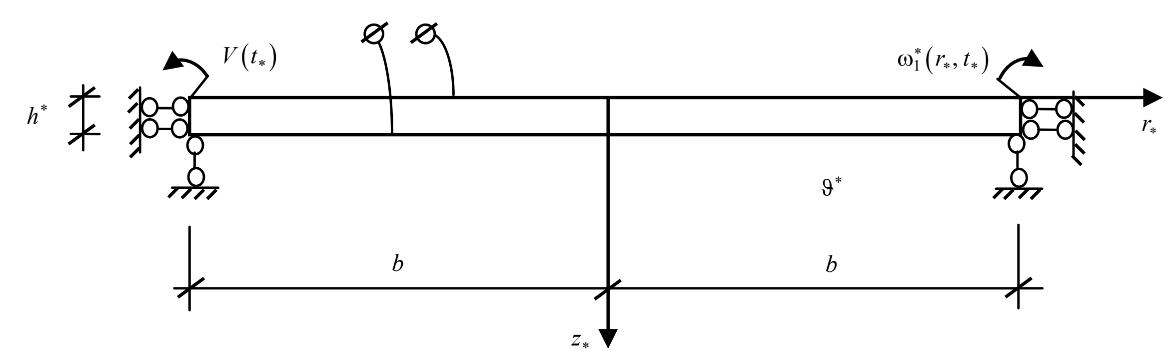


Рис. 1. Расчетная схема пластины

Математическая формулировка рассматриваемой задачи в безразмерной форме для аксиально поляризованного пьезокерамического материала с гексагональной кристаллической решеткой состава 6 мм имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial r}\nabla U + a_1\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + a_3\frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} - \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0, \quad (1)$$

$$a_1\nabla\frac{\partial W}{\partial r} + a_4\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_2\nabla\frac{\partial U}{\partial z} + a_5\nabla\frac{\partial \phi}{\partial r} + a_6\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - a_7\frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0,$$

$$-\nabla\frac{\partial \phi}{\partial r} - a_8\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + a_9\nabla\frac{\partial U}{\partial z} + a_{10}\nabla\frac{\partial W}{\partial r} + a_{11}\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_{12}\nabla\Theta + a_{13}\frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0,$$

$$\nabla\frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left[\Theta + a_{14}\left(\nabla U + \frac{\partial W}{\partial z}\right) - a_{15}\frac{\partial \phi}{\partial z}\right] = 0;$$

$$r = 0,1;\ \{U, W, \phi, \Theta\}_{|r=0} < \infty;\ \left\{U, \frac{\partial W}{\partial r}, \frac{\partial \Theta}{\partial r}\right\}_{|r=1} = 0, \quad (2)$$

$$D_{r|r=1} = 0\left\{\left[-\frac{\partial \phi}{\partial r} + a_{10}\left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z}\right) + a_{12}\Theta\right]_{|r=1} = 0\right\};$$

$$r = 0,1;\ \{U, W, \phi, \Theta\}_{|r=0} < \infty;\ \left\{U, \frac{\partial W}{\partial r}, \frac{\partial \Theta}{\partial r}\right\}_{|r=1} = 0, \quad (2)$$

$$z = 0, h;\ \sigma_{zz} = 0\left\{a_{16}\nabla U + a_4\frac{\partial W}{\partial z} + a_6\frac{\partial \phi}{\partial z} - a_7\Theta = 0\right\};\ \sigma_{rz} = 0\left\{\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0\right\}, \quad (3)$$

$$\phi_{|z=0} = \phi_0,\ \phi_{|z=h} = 0,\ \Theta_{|z=0} = \omega_1,\ \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} + a_{17}\Theta\right)_{|z=h} = a_{17}\vartheta;$$

$$t = 0, \{U, W, \phi, \Theta\} = 0, \frac{\partial\{U, W, \phi\}}{\partial t}_{|t=0} = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial t}_{|t=0} = \dot{\Theta}_0; \quad (4)$$

где

$$\{U, W, r, z\} = \{U^*, W^*, r_*, z_*\}/b, \{\phi, \phi_0\} = \frac{e_{31}}{C_{11}b}\{\phi^*, \phi_0^*\}, \{\phi, \phi_0\} = \frac{e_{31}}{C_{11}b}\{\phi^*, \phi_0^*\},$$

$$\{\Theta, \omega_1, \vartheta\} = \frac{\gamma_{11}}{C_{11}}\{\Theta^*, (\omega_1^* - T_0), (\vartheta^* - T_0)\}, a_1 = \frac{C_{55}}{C_{11}}, a_2 = \frac{C_{13} + C_{55}}{C_{11}}, a_3 = \frac{e_{15} + e_{31}}{e_{31}},$$

$$a_4 = \frac{C_{33}}{C_{11}}, a_5 = \frac{e_{15}}{e_{31}}, a_6 = \frac{e_{33}}{e_{31}}, a_7 = \frac{\gamma_{33}}{\gamma_{11}}, a_8 = \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}, a_9 = \frac{e_{31}(e_{15} + e_{31})}{C_{11}\varepsilon_{11}}, a_{10} = \frac{e_{15}e_{31}}{C_{11}\varepsilon_{11}},$$

$$a_{11} = a_{10}\frac{e_{33}}{e_{15}}, a_{12} = \frac{g_{11}e_{31}}{\gamma_{11}\varepsilon_{11}}, a_{14} = T_0\frac{\gamma_{11}\gamma_{33}}{C_{11}k}, a_{15} = T_0\frac{g_{33}\gamma_{11}}{e_{31}k}, a_{16} = a_2 - a_1,$$

$a_{17} = \alpha \cdot b/\Lambda$, $\Theta^*(r_*, z_*, t_*)$ — приращение температуры в размерной форме; $U^*(r_*, z_*, t_*), W^*(r_*, z_*, t_*)$ $\phi^*(r_*, z_*, t_*)$ — компоненты вектора перемещений, потенциал электрического поля; $\sigma_{zz}(r, z, t)$, $\sigma_{rz}(r, z, t)$ — компоненты тензора механических напряжений; $D_r(r, z, t)$ — радиальная компонента вектора индукции электрического поля; Λ, k, α_t — коэффициенты теплопроводности, объемной теплоемкости и линейного температурного расширения; $\phi_0^*(r, t)$ — электрический потенциал, индуцируемый на верхней лицевой поверхности; γ_{ii}, g_{ii} — компоненты тензора температурных напряжений и пирокоэффициентов ($i = 1,3$, $\gamma_{ii} = C_{ii}\alpha_t$); e_{15}, e_{31}, e_{33}, ε_{11}, ε_{33} — пьезомодули и коэффициенты диэлектрической проницаемости; $\Theta^* = T - T$; T, T_0 — текущая температуры и температура первоначального состояния тела; β_{rel} — время релаксации; α — коэффициент теплоотдачи, $\dot{\Theta}_0$ — известная скорость изменения температуры; $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}$.

Для определения потенциала электрического поля, индуцируемого в процессе деформирования, на верхней лицевой поверхности $\phi_0^*(r, t)$, в случае подключения электродов к измерительному прибору с большим входным сопротивлением, используется дополнительное граничное условие:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{(S)} D_{z|z=0}\,dS = 0 \quad (5)$$

где $D_z(r, z, t)$ — аксиальная компонента вектора индукции; S — площадь поверхности.

Построение общего решения. Для выполнения условия закрепления цилиндрической поверхности пластины в вертикальной плоскости вводятся новые функции $w(r, z, t)$, $W_1(t)$:

$$W(r, z, t) = W_1(t) + w(r, z, t), \quad (6)$$

что позволяет сформировать краевую задачу относительно функций U, w, ϕ, Θ, которая исследуется методом конечных преобразований Фурье-Бесселя:

$$u_H(n, z, t) = \int_0^1 U(r, z, t)\, r J_1(j_n r)\, dr, \quad (7)$$

$$\{w_H(n, z, t), \phi_H(n, z, t), N_H(n, z, t)\} = \int_0^1 \{w(r, z, t), \phi(r, z, t), \Theta(r, z, t)\}\, r J_0(j_n r)\, dr,$$

$$U(r, z, t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_H(n, z, t)}{J_0(j_n)^2}J_1(j_n r) \quad (8)$$

$$\{w(r, z, t), \phi(r, z, t), \Theta(r, z, t)\} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{w_H(n, z, t), \phi_H(n, z, t), N_H(n, z, t)\}}{J_0(j_n)^2}J_0(j_n r),$$

где j_n — положительные нули функции $J_1(j_n)$ $\left(n = \overline{0,\infty};\ j_0 = 0\right)$; $J_\nu(...)$ — функции Бесселя.

Здесь необходимо отметить, что для удовлетворения последнего граничного условия (2) необходимо принять, что первоначальная температура пластины T_0 равна температуре внешней среды ϑ^* и функция приращения температуры на верхней лицевой поверхности $\omega_1(1, t) = 0$. Данные допущения без большой погрешности позволяют считать, что на цилиндрической поверхности пластины $\Theta(1, z, t) = 0$.

В результате использования алгоритма преобразования в области изображений получается следующая начально-краевая задача:

$$-j_n^2 u_H + a_1 \frac{\partial^2 u_H}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial w_H}{\partial z} + a_3 j_n \frac{\partial \phi_H}{\partial z} + j_n N_H = 0, \tag{9}$$

$$-a_1 j_n^2 w_H + a_4 \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - a_5 j_n^2 \phi_H + a_6 \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial z^2} - a_7 \frac{\partial N_H}{\partial z} = 0,$$

$$j_n^2 \phi_H - a_8 \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial z^2} + a_9 j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - a_{10} j_n^2 w_H + a_{11} \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + a_{12} j_n N_H + a_{13} \frac{\partial N_H}{\partial z} = 0,$$

$$-j_n^2 N_H + \frac{\partial^2 N_H}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left[N_H + a_{14}\left(j_n u_H + \frac{\partial w_H}{\partial z}\right) - a_{15} \frac{\partial \phi_H}{\partial z}\right] = 0;$$

$$z = 0, h;\ a_{16} j_n u_H + a_4 \frac{\partial w_H}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \phi_H}{\partial z} - a_7 N_H = 0;\ \frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H = 0, \tag{10}$$

$$\phi_{H|z=0} = \phi_{0H},\ \phi_{H|z=h} = 0,\ N_{H|z=0} = \omega_{1H},\ \left(\frac{\partial N_H}{\partial z} + a_{17} N_H\right)_{|z=h} = a_{17} \vartheta_H;$$

$$t = 0, \{u_H, \phi_H, N_H\} = 0,\ w_H = w_{0H},\ \frac{\partial \{u_H, \phi_H\}}{\partial t}_{|t=0} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial w_H}{\partial t}_{|t=0} = \dot{w}_{0H},\ \frac{\partial N_H}{\partial t}_{|t=0} = \dot{N}_{0H};$$

где $\{\phi_{0H}, \vartheta_H, w_{0H}, \dot{w}_{0H}, \dot{N}_{0H}\} = \int_0^1 \left\{\phi_0, \vartheta, -W_1(0), -\frac{dW_1(t)}{dt}_{|t=0}, \dot{\Theta}_0\right\} r J_0(j_n r)\, dr.$

На следующем этапе решения введение функций $U_H(n,z,t), W_H(n,z,t), \varphi_H(n,z,t), Q_H(n,z,t)$ при использовании следующих соотношений:

$$u_H(n,z,t) = H_1(n,z,t) + U_H(n,z,t),\ w_H(n,z,t) = H_2(n,z,t) + W_H(n,z,t), \tag{12}$$

$$\phi_H(n,z,t) = H_3(n,z,t) + \varphi_H(n,z,t),\ N_H(n,z,t) = H_4(n,z,t) + Q_H(n,z,t),$$

позволяет приведения условий (9) к однородным.

Здесь $\{H_1 ... H_4\} = \{H_1^* ... H_4^*\} + \{f_9(z) ... f_{12}(z)\}\phi_{0H}(t), \{H_1^* ... H_4^*\} = \{f_1(z) ... f_4(z)\}\omega_{1H}(t) + \{f_5(z) ... f_8(z)\}\vartheta_H$, $f_1(z) ... f_{12}(z)$ — дважды дифференцируемые функции.

Подстановка (12) в (9) – (11) при удовлетворении условий:

$$z = 0, h;\ a_{16} j_n H_1 + a_4 \frac{\partial H_2}{\partial z} + a_6 \frac{\partial H_3}{\partial z} - a_7 H_4 = 0;\ j_n H_2 - \frac{\partial H_1}{\partial z} = 0, \tag{13}$$

$$H_{3|z=0} = \phi_{0H},\ H_{3|z=h} = 0,\ H_{4|z=0} = \omega_{1H},\ \left(\frac{\partial H_4}{\partial z} + a_{17} H_4\right)_{|z=h} = a_{17} \vartheta_H,$$

позволяет сформулировать следующую задачу:

$$-j_n^2 U_H + a_1 \frac{\partial^2 U_H}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial W_H}{\partial z} + a_3 j_n \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} + j_n Q_H = F_1, \tag{14}$$

$$-a_1 j_n^2 W_H + a_4 \frac{\partial^2 W_H}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial U_H}{\partial z} - a_5 j_n^2 \varphi_H + a_6 \frac{\partial^2 \varphi_H}{\partial z^2} - a_7 \frac{\partial Q_H}{\partial z} = F_2,$$

$$j_n^2 \varphi_H - a_8 \frac{\partial^2 \varphi_H}{\partial z^2} + a_9 j_n \frac{\partial U_H}{\partial z} - a_{10} j_n^2 W_H + a_{11} \frac{\partial^2 W_H}{\partial z^2} + a_{12} j_n Q_H + a_{13} \frac{\partial Q_H}{\partial z} = F_3,$$

$$-j_n^2 Q_H + \frac{\partial^2 Q_H}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left[Q_H + a_{14}\left(j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z}\right) - a_{15} \frac{\partial \varphi_H}{\partial z}\right] = F_4,$$

$$z=0,h;\ a_{16}j_nU_H+a_4\frac{\partial W_H}{\partial z}+a_6\frac{\partial \varphi_H}{\partial z}-a_7Q_H=0;\ \frac{\partial U_H}{\partial z}-j_nW_H=0, \tag{15}$$

$$\varphi_{H|z=0}=\varphi_{H|z=h}=0,\ Q_{H|z=0}=0,\ \left(\frac{\partial Q_H}{\partial z}+a_{17}Q_H\right)_{|z=h}=0;$$

$$t=0;\ U_H=U_{0H};\ W_H=W_{0H};\ \varphi_H=\varphi_{0H};\ Q_H=Q_{0H}, \tag{16}$$

$$\left.\frac{\partial U_H}{\partial t}\right|_{t=0}=\dot U_{0H},\ \left.\frac{\partial W_H}{\partial t}\right|_{t=0}=\dot W_{0H},\ \left.\frac{\partial \varphi_H}{\partial t}\right|_{t=0}=\dot\varphi_{0H},\ \left.\frac{\partial Q_H}{\partial t}\right|_{t=0}=\dot Q_{0H};$$

где

$$F_1=j_n^2H_1-a_1\frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2}+a_2j_n\frac{\partial H_2}{\partial z}-a_3j_n\frac{\partial H_3}{\partial z}-j_nH_4,$$

$$F_2=a_1j_n^2H_2-a_4\frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2}-a_2j_n\frac{\partial H_1}{\partial z}+a_5j_n^2H_3-a_6\frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2}+a_7\frac{\partial H_4}{\partial z},$$

$$F_3=-j_n^2H_3+a_8\frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2}-a_9j_n\frac{\partial H_1}{\partial z}+a_{10}j_n^2H_2-a_{11}\frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2}-a_{12}j_nH_4-a_{13}\frac{\partial H_4}{\partial z},$$

$$F_4=j_n^2H_4-\frac{\partial^2 H_4}{\partial z^2}+\left(\frac{\partial}{\partial t}+\beta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left[H_4+a_{14}\left(j_nH_1+\frac{\partial H_2}{\partial z}\right)-a_{15}\frac{\partial H_3}{\partial z}\right],$$

$$U_{0H}=-H_{1|t=0},\ W_{0H}=w_{0H}-H_{2|t=0},\ \varphi_{0H}=-H_{3|t=0},\ Q_{0H}=-H_{4|t=0},$$

$$\dot U_{0H}=-\left.\frac{\partial H_1}{\partial t}\right|_{t=0},\ \dot W_{0H}=\dot w_{0H}-\left.\frac{\partial H_2}{\partial t}\right|_{t=0},\ \dot\varphi_{0H}=-\left.\frac{\partial H_3}{\partial t}\right|_{t=0},\ \dot Q_{0H}=\dot N_{0H}-\left.\frac{\partial H_4}{\partial t}\right|_{t=0}.$$

Используя биортогональное конечное преобразование (КИП) [15], получаем решение задачи (14) – (16). На сегменте $[0, h]$ вводится КИП с неизвестными компонентами вектор-функций преобразований $K_1(\lambda_{in}, z)\ldots K_4(\lambda_{in}, z)$, $N_1(\mu_{in}, z)\ldots N_1(\mu_{in}, z)$:

$$G(n,\lambda_{in},t)=\int_0^h\left[Q_H+a_{14}\left(j_nU_H+\frac{\partial W_H}{\partial z}\right)-a_{15}\frac{\partial\varphi_H}{\partial z}\right]K_4(\lambda_{in},z)dz, \tag{17}$$

$$\left\{U_H,W_H,\varphi_H,Q_H\right\}=\sum_{i=1}^{\infty}G(n,\lambda_{in},t)\frac{\left\{N_1(\mu_{in},z),N_2(\mu_{in},z),N_3(\mu_{in},z),N_4(\mu_{in},z)\right\}}{\|K_{in}\|^2},$$

$$\|K_{in}\|^2=\int_0^h K_4(\lambda_{in},z)N_4(\mu_{in},z)dz,$$

где λ_{in}, μ_{in} — собственные значения соответствующих задач относительно компонент вектор-функций КИП ($k = 1\ldots4$).

В ходе преобразований получаем задачу для определения трансформанты $G(n, \lambda_{in}, t)$:

$$\left(\beta\frac{d^2}{dt^2}+\frac{d}{dt}+\lambda_{in}^2\right)G(n,\lambda_{in},t)=-F_H(n,\lambda_{in},t),\ \left(i=\overline{1,\infty}\qquad n=\overline{0,\infty}\right), \tag{18}$$

$$t=0,\ G\left(\lambda_{in},n,0\right)=G_{0H},\ \left.\frac{dG\left(\lambda_{in},n,t\right)}{dt}\right|_{t=0}=G_0\left(\lambda_{in},n\right), \tag{19}$$

решение которых будет иметь следующий вид:

$$G(n,\lambda_{in},t)=\left(m_{1in}-m_{2in}\right)^{-1}\Big\{\left(\dot G_0-G_0m_{2in}\right)exp\left(m_{1in}t\right)-\left(\dot G_0-G_0m_{1in}\right)exp\left(m_{2in}t\right)+$$
$$+\beta^{-1}\int_0^t F_H(n,\lambda_{in},\tau)\left[exp\left(m_{2in}\left(t-\tau\right)\right)-exp\left(m_{1in}\left(t-\tau\right)\right)\right]d\tau\Big\}, \tag{20}$$

кроме того, две однородные задачи относительно компонент $K_1(\lambda_{in}, z)\ldots K_4(\lambda_{in}, z)$,

$$-j_n^2K_{1in}+a_1\frac{d^2K_{1in}}{dz^2}-a_2j_n\frac{dK_{2in}}{dz}-a_9j_n\frac{dK_{3in}}{dz}+\lambda_{in}^2a_{14}j_nK_{4in}=0, \tag{21}$$

$$-a_1j_n^2K_{2in}+a_4\frac{d^2K_{2in}}{dz^2}+a_2j_n\frac{dK_{1in}}{dz}-a_{10}j_n^2K_{3in}+a_{11}\frac{d^2K_{3in}}{dz^2}-\lambda_{in}^2a_{14}\frac{dK_{4in}}{dz}=0,$$

$$j_n^2 K_{3in} - a_8 \frac{d^2 K_{3in}}{dz^2} - a_3 j_n \frac{dK_{1in}}{dz} - a_5 j_n^2 K_{2in} + a_6 \frac{d^2 K_{2in}}{dz^2} + \lambda_{in}^2 a_{15} \frac{dK_{4in}}{dz} = 0,$$

$$\left(\lambda_{in}^2 - j_n^2\right) K_{4in} + \frac{d^2 K_{4in}}{dz^2} + j_n K_{1in} + a_7 \frac{dK_{2in}}{dz} + a_{12} j_n K_{3in} - a_{13} \frac{dK_{3in}}{dz} = 0;$$

$$z = 0, h,\ a_{16} j_n K_{1in} + a_4 \frac{dK_{2in}}{dz} + a_{11} \frac{dK_{3in}}{dz} - \lambda_{in}^2 a_{15} K_{4in} = 0,\ K_{3in|z=0} = K_{3in|z=h} = 0, \tag{22}$$

$$\frac{dK_{1in}}{dz} - j_n K_{2in} - \frac{a_{10}}{a_1} j_n K_{3in} = 0,\ K_{4in|z=0} = 0, \left(\frac{dK_{4in}}{dz} + a_{17} K_{4in} \right)_{|z=h} = 0;$$

и $N_1(\mu_{in}, z) \ldots N_4(\mu_{in}, z)$:

$$-j_n^2 N_{1in} + a_1 \frac{d^2 N_{1in}}{dz^2} - a_2 j_n \frac{dN_{2in}}{dz} + a_3 j_n \frac{dN_{3in}}{dz} + j_n N_{4in} = 0, \tag{23}$$

$$-a_1 j_n^2 N_{2in} + a_4 \frac{d^2 N_{2in}}{dz^2} + a_2 j_n \frac{dN_{1in}}{dz} - a_5 j_n^2 N_{3in} + a_6 \frac{d^2 N_{3in}}{dz^2} - a_7 \frac{dN_{4in}}{dz} = 0,$$

$$j_n^2 N_{3in} - a_8 \frac{d^2 N_{3in}}{dz^2} + a_9 j_n \frac{dN_{1in}}{dz} - a_{10} j_n^2 N_{2in} + a_{11} \frac{d^2 N_{2in}}{dz^2} + a_{12} j_n N_{4in} + a_{13} \frac{dN_{4in}}{dz} = 0,$$

$$-j_n^2 N_{4in} + \frac{d^2 N_{4in}}{dz^2} + \mu_{in}^2 \left(N_{4in} + a_{14} j_n N_{1in} + a_{14} \frac{dN_{2in}}{dz} - a_{15} \frac{dN_{3in}}{dz} \right) = 0;$$

$$z = 0, h,\ a_{16} j_n N_{1in} + a_4 \frac{dN_{2in}}{dz} + a_6 \frac{dN_{3in}}{dz} - a_7 N_{4in} = 0,\ \frac{\partial N_{1in}}{\partial z} - j_n N_{2in} = 0, \tag{24}$$

$$N_{3in|z=0} = N_{3in|z=h} = 0,\ N_{4in|z=0} = 0, \left(\frac{\partial N_{4in}}{\partial z} + a_{17} N_{4in} \right)_{|z=h} = 0;$$

где

$$F_H\left(n, \lambda_{in}, t\right) = \int_0^h \left(F_1 K_{1in} + F_2 K_{2in} + F_3 K_{3in} + F_4 K_{4in} \right) dz,$$

$$\left\{ G_{0H}, \dot{G}_{0H} \right\} = \int_0^h \left[\left\{ Q_{0H}, \dot{Q}_{0H} \right\} + a_{14} \left(j_n \left\{ U_{0H}, \dot{U}_{0H} \right\} + \frac{d \left\{ W_{0H}, \dot{W}_{0H} \right\}}{dz} \right) - a_{15} \frac{d \left\{ \varphi_{0H}, \dot{\varphi}_{0H} \right\}}{dz} \right] K_{4in} dz,$$

m_{1in}, m_{2in} — корни характеристического уравнения: $\beta m_{in}^2 + m_{in} + \lambda_{in}^2 = 0.$

Построенная однородная задача (23), (24) относительно функций $N_1(\mu_{in}, z) \ldots N_4(\mu_{in}, z)$ инвариантна исходным расчетным соотношениям (14), (15).

Системы (21), (23) приводятся к следующим уравнениям относительно $K_2(\lambda_{in}, z)$, $N_2(\mu_{in}, z)$:

$$\left(\frac{d^8}{dz^8} + e_{1in} \frac{d^6}{dz^6} + e_{2in} \frac{d^4}{dz^4} + e_{3in} \frac{d^2}{dz^2} + e_{4in} \right) \left\{ K_{2in}, N_{2in} \right\} = 0. \tag{25}$$

Коэффициенты $e_{1in} \ldots e_{4in}$ в статье не приведены в связи ограничением ее объема.

В уравнении (25) левую часть разложим на коммутативные сомножители, представленные ниже:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - A_{1in}^2 \right) \left(\frac{d^2}{dz^2} + A_{2in}^2 \right) \left(\frac{d^4}{dz^4} + m_{3in}^2 \frac{d^2}{dz^2} + m_{4in}^2 \right) \left\{ K_{2in}, N_{2in} \right\} = 0, \tag{26}$$

где $A_{1in} = \sqrt{B_{1in}}$, $A_{2in} = \sqrt{S_{1in}}$, $m_{3in}^2 = e_{1in} + B_{1in} + S_{1in}$, $m_{4in}^2 = \dfrac{e_{4in}}{B_{1in} S_{2in}}$, B_{1in}, S_{1in} — действительные положительные корни следующих характеристических уравнений:

$$B_{in}^4 + e_{1in} B_{in}^3 + e_{2in} B_{in}^2 + e_{3in} B_{in} + e_{4in} = 0,$$

$$S_{in}^3 - \left(e_{1in} + B_{1in} \right) S_{in}^2 + \left(e_{1in} B_{1in} + B_{1in}^2 + e_{2in} \right) S_{in} - \frac{e_{4in}}{B_{1in}} = 0.$$

При исследовании круглой жестко закрепленной пьезокерамической пластины общий интеграл уравнений (26) будет иметь следующий вид:

$$\{K_{2in}, N_{2in}\} = \{D_{1in}, E_{1in}\} exp(A_{1in}z) + \{D_{2in}, E_{2in}\} exp(-A_{1in}z) + \{D_{3in}, E_{3in}\} sin(A_{2in}z) + \\ + \{D_{4in}, E_{4in}\} cos(A_{2in}z) + \{D_{5in}, E_{5in}\} sin(A_{3in}z) + \{D_{6in}, E_{6in}\} cos(A_{3in}z) + \\ + \{D_{7in}, E_{7in}\} sin(A_{4in}z) + \{D_{8in}, E_{8in}\} cos(A_{4in}z), \quad (27)$$

где

$$A_{3in} = \left(\frac{m_{3in}^2 + \sqrt{m_{3in}^4 - 4m_{4in}^2}}{2} \right)^{0,5}, \ A_{4in} = \left(\frac{m_{3in}^2 - \sqrt{m_{3in}^4 - 4m_{4in}^2}}{2} \right)^{0,5}.$$

Здесь следует отметить, что условие о действительных положительных значениях коэффициентов B_{1in}, S_{1in}, $A_{1in} \ldots A_{4in}$ выполняется для большинства конструкций, выполненных из пьезокерамического материала. В противном случае просто меняется структура формул (26), (27).

Учитывая, что ранее были получены связи в результате приведения (21), (23) к (25), получаем выражения для функций $K_1(\lambda_{in}, z)$, $K_3(\lambda_{in}, z)$, $K_4(\lambda_{in}, z)$, $N_1(\lambda_{in}, z)$, $N_3(\lambda_{in}, z)$, $N_4(\lambda_{in}, z)$.

Подстановка $K_1(\lambda_{in}, z) \ldots K_4(\lambda_{in}, z)$, $N_1(\mu_{in}, z) \ldots N_1(\mu_{in}, z)$ в условия (22), (24) позволяет определить постоянные $D_{1in} \ldots D_{8in}$, $E_{1in} \ldots E_{8in}$ и собственные значения λ_{in}, μ_{in}.

Итоговые выражения функций $U(n, z, t)$, $W(n, z, t)$, $\phi(n, z, t)$, $\Theta(n, z, t)$ получим, применяя формулы обращения (17), (8). Тогда, с учетом (6), (12), имеем:

$$U(r,z,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_1(n,z,t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n,\lambda_{in},t) N_1(\mu_{in},z) \|K_{in}\|^{-2} \right], \quad (28)$$

$$W(r,z,t) = W_1(t) + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_2(n,z,t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n,\lambda_{in},t) N_2(\mu_{in},z) \|K_{in}\|^{-2} \right],$$

$$\phi(r,z,t) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_3(n,z,t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n,\lambda_{in},t) N_3(\mu_{in},z) \|K_{in}\|^{-2} \right],$$

$$\Theta(r,z,t) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_4(n,z,t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n,\lambda_{in},t) N_4(\mu_{in},z) \|K_{in}\|^{-2} \right].$$

Функции $f_1(z) \ldots f_{12}(z)$ вычисляются из условия упрощения $F_1 \ldots F_4$ при удовлетворении условий (13):

$$j_n^2 H_1 - a_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial H_2}{\partial z} - a_3 j_n \frac{\partial H_3}{\partial z} - j_n H_4 = 0,$$

$$a_1 j_n^2 H_2 - a_4 \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} + a_5 j_n^2 H_3 - a_6 \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} + a_7 \frac{\partial H_4}{\partial z} = 0,$$

$$-j_n^2 H_3 + a_8 \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} - a_9 j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} + a_{10} j_n^2 H_2 - a_{11} \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_{12} j_n H_4 - a_{13} \frac{\partial H_4}{\partial z} = 0,$$

$$j_n^2 H_4 - \frac{\partial^2 H_4}{\partial z^2} = 0.$$

Функция $W_1(t)$ определяется из условия $W(1, h, t) = 0$:

$$W_1(t) = -2\sum_{n=0}^{\infty} \left[H_2(n,h,t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n,\lambda_{in},t) N_2(\mu_{in},h) \|K_i\|^{-2} \right] J_0(j_n)^{-1}.$$

Для качественной оценки индуцируемого электрического импульса на его верхней лицевой поверхности необходимо сформировать два электрода с радиусом раздела R и подключением их к измерительному прибору. В этом случае потенциал $\phi_0(r, t)$, индуцируемый на двух эквипотенциальных поверхностях, представляется в виде:

$$\phi_0(r,t) = \phi_{01}(t) H(R-r) + \phi_{02}(t) H(r-R), \quad (29)$$

где $H(\ldots)$ — единичная функция Хэвисайда.

Подстановка (29) в (5) позволяет определить выражения для определения потенциалов $\phi_0(t)$, $\phi_{02}(t)$:

$$\int_0^R D_{z|z=0} r dr = \int_R^1 D_{z|z=0} r dr = 0. \quad (30)$$

В результате решения (30) функции $\phi_0(t)$, $\phi_{02}(t)$ определяются следующим образом:

$$\phi_{01}(t)=Q_{01}^{-1}\left[Q_1(t)+Q_2(t)+Q_3(t)\right],\ \phi_{02}(t)=Q_{02}^{-1}\left[-Q_1(t)+\frac{1-R^2}{R^2}Q_2(t)+Q_4(t)\right],$$

где

$$Q_1(t)=R\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(j_nR)}{J_0(j_n)^2}\left\{\frac{a_{10}}{a_5}H_1^*(n,0,t)+\frac{a_{11}}{j_n}\frac{\partial H_2^*(n,z,t)}{\partial z}_{|z=0}-\frac{a_8}{j_n}\frac{\partial H_3^*(n,z,t)}{\partial z}_{|z=0}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{G(\lambda_{in},0,t)}{\|K_{in}\|^2}\left[\frac{a_{10}}{a_5}K_1(\lambda_{in},0)+\frac{a_{11}}{j_n}\frac{dK_2(\lambda_{in},z)}{dz}_{|z=0}-\frac{a_8}{j_n}\frac{dK_3(\lambda_{in},z)}{dz}_{|z=0}\right]\right\},$$

$$Q_2(t)=R^2\left[a_{11}\frac{\partial H_2^*(0,z,t)}{\partial z}_{|z=0}-a_8\frac{\partial H_3^*(0,z,t)}{\partial z}_{|z=0}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{G(\lambda_{i0},0,t)}{\|K_{i0}\|^2}\left[a_{11}\frac{dK_2(\lambda_{i0},z)}{dz}_{|z=0}-a_8\frac{dK_3(\lambda_{i0},z)}{dz}_{|z=0}\right]\right],$$

$$Q_3(t)=a_{13}\int_0^R\omega_1(r,t)rdr,\ Q_4(t)=a_{13}\int_R^1\omega_1(r,t)rdr,$$

$$Q_{01}=-\left\{\frac{R^4}{2}\left[a_{11}\frac{df_{10}(z)}{dz}_{|z=0}-a_8\frac{df_{11}(z)}{dz}_{|z=0}\right]+2R^2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{J_1(j_nR)}{J_0(j_n)}\right]^2\left[\frac{a_{10}}{a_5}f_9(z)+\frac{a_{11}}{j_n}\frac{df_{10}(z)}{dz}_{|z=0}-\frac{a_8}{j_n}\frac{df_{11}(z)}{dz}_{|z=0}\right]\right\},$$

$$Q_{02}=-\left\{\frac{\left(1-R^2\right)^2}{2}\left[a_{11}\frac{df_{10}(z)}{dz}_{|z=0}-a_8\frac{df_{11}(z)}{dz}_{|z=0}\right]+2R^2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{J_1(j_nR)}{J_0(j_n)}\right]^2\left[\frac{a_{10}}{a_5}f_9(z)+\frac{a_{11}}{j_n}\frac{df_{10}(z)}{dz}_{|z=0}-\frac{a_8}{j_n}\frac{df_{11}(z)}{dz}_{|z=0}\right]\right\}.$$

В этом случае разность потенциалов $V(t)$ определяется равенством:

$$V(t)=\phi_{01}(t)-\phi_{02}(t). \quad (31)$$

Результаты исследования. Численные результаты представлены для пластины, изготовленной из пьезокерамики состава PZT–4 [4, 11, 16]:

$$\{C_{11},C_{12},C_{13},C_{33},C_{55}\}=\{13{,}9;7{,}78;7{,}43;11{,}5;2{,}26\}\times10^{10}\ \text{Па},\ \{\varepsilon_{11},\varepsilon_{33}\}=\{6{,}46;5{,}62\}\times10^{-9}\ \text{Ф/м},$$

$$\{e_{15},e_{31},e_{33}\}=\{12{,}7;-5{,}2;15{,}1\}\ \text{Кл/м}^2,\ \Lambda=1{,}6\ \text{Вт/}(\text{м}\cdot\text{К}),\ \alpha_t=0{,}4\times10^{-5}\ \text{К}^{-1},$$

$$k=3\times10^6\ \text{Дж/}\left(\text{м}^3\cdot\text{К}\right),\ g_{11}=g_{33}=-0{,}6\times10^{-4}\ \text{Кл/(м}^2\cdot\text{К)},\ \beta_{rel}=10^{-4}\ \text{с},\ \alpha=5{,}6\ \text{Вт/(м}^2\cdot\text{К)}.$$

Исследуется следующий случай изменения температуры $\omega_1^*(r_*,t_*)$:

$$\omega_1^*(r_*,t_*)=\left(1-\frac{r_*}{b}\right)T_{max}^*\left[sin\left(\frac{\pi}{2t_{max}^*}t_*\right)H\left(t_{max}^*-t_*\right)+H\left(t_*-t_{max}^*\right)\right],$$

где T_{max}^*, t_{max}^* — максимальное значение температуры и соответствующее ему время $\left(T_{max}^*=100\ °\text{C}, T_0=20\ °\text{C}\right)$.

На рис. 2 приведены графики, отражающие в различные моменты времени $\left(t_{max}^*=0{,}1\ \text{c}\right)$ изменение температуры $\Theta^*(0, z, t)$ в толщине пластины ($b = 14\times10^{-3}$ м, $h^* = 1\times10^{-3}$ м).

По результатам расчета наблюдается, что вследствие высокого коэффициента теплопроводности и небольшой толщины пьезокерамической пластины, установившийся температурный режим формируется достаточно быстро $\left(t_{max}^*=10\ \text{c}\right)$ при достижении $\Theta^*(0, z, t)$ на нижней лицевой поверхности ($z = h$) 78 °C (рис. 2).

На рис. 3 показано изменение $\Theta^*\left(0,h/2,t\right)$ по времени $\left(t_{max}^*=3\times10^{-5}\ \text{c}\right)$ с учетом (представлено сплошной линией) и без учета (представлено пунктирной линий, $\beta=0$) релаксации теплового потока ($b = 14\times10^{-5}$ м, $h^* = 1\times10^{-5}$ м). Необходимо подчеркнуть, что использование гиперболического уравнения теплопроводности Лорда-Шульмана необходимо только при исследовании пьезокерамической конструкции микро-размеров при очень быстром изменении $\omega_1^*(r_*,t_*)$.

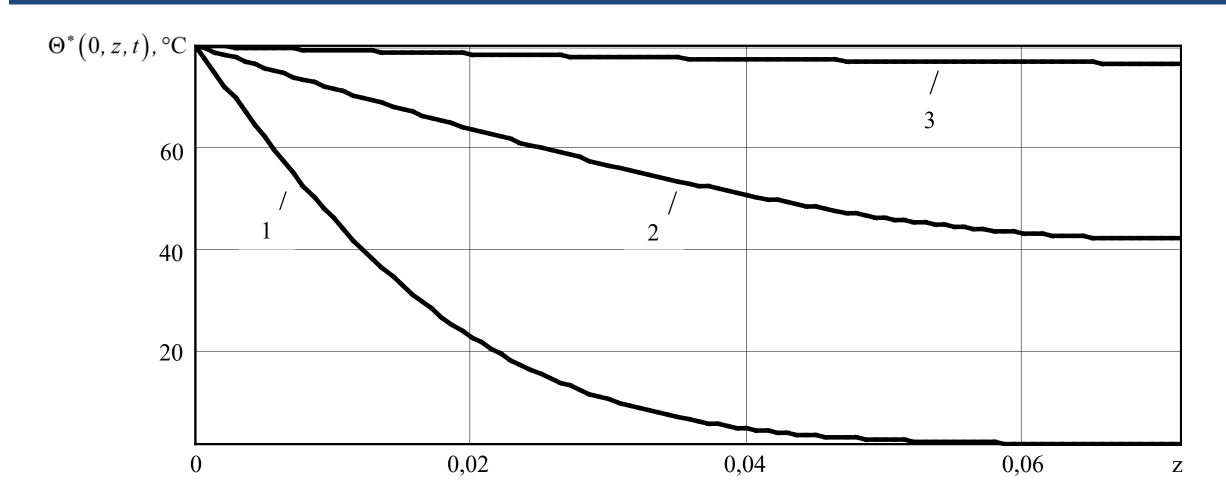


Рис. 2. Графики $\Theta^*\left(0,z,t\right)-z$: $1 — t=t^*_{max}$; $2 — t=10t^*_{max}$; $3 — t=100t^*_{max}$

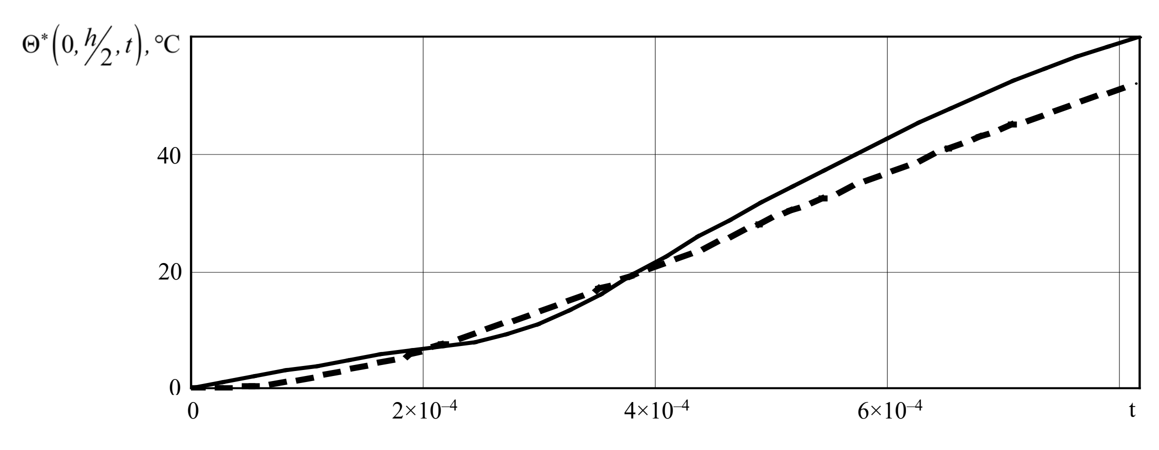


Рис. 3. Графики $\Theta^*\left(0,\frac{h}{2},t\right)-t\left(t=\frac{\Lambda}{kb^2}t_*\right)$:

сплошная линия — $\beta=10^{-5}\left(\text{с}\right)$; пунктирная линия — $\beta=0$

Численные результаты определения функции $\Theta^*(r, z, t)$ показывают, что при проведении исследования конструкции из пьезокерамического материала возможно пренебречь влиянием скорости изменения объема тела и напряженности на температурное поле, т.е. использовать в расчетах только уравнение теплопроводности.

На рис. 4 представлен график перемещений $W^*(0, z, t)$ по времени t, а на рис. 5 зависимости изменения радиальной компоненты нормальных напряжений $\sigma_{rr}(r, z, t)$ по координате r в различные моменты времени: $1-t=t_{max}$, $2-t=10t_{max}$ $\left(t^*_{max}=1\text{ с}\right)$, сплошная линия — $z = 0$, пунктирная линия — $z = h$.

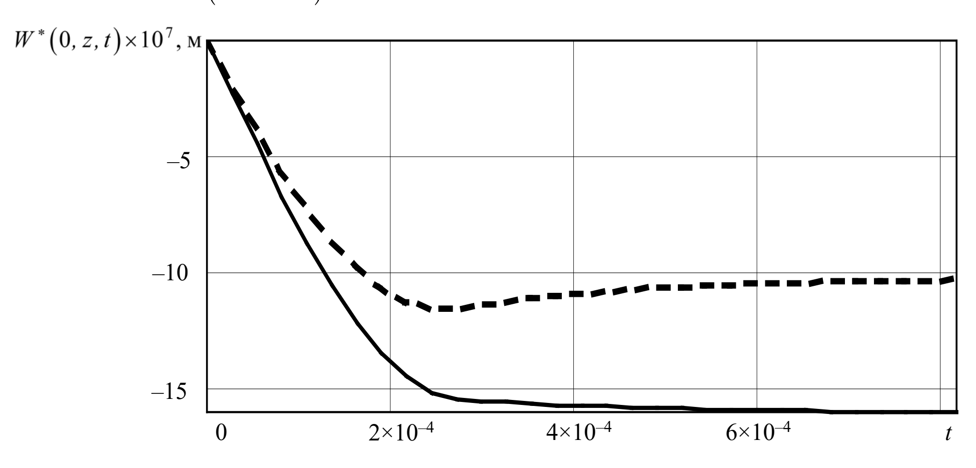


Рис. 4. Графики $W^*(0, z, t) - t$

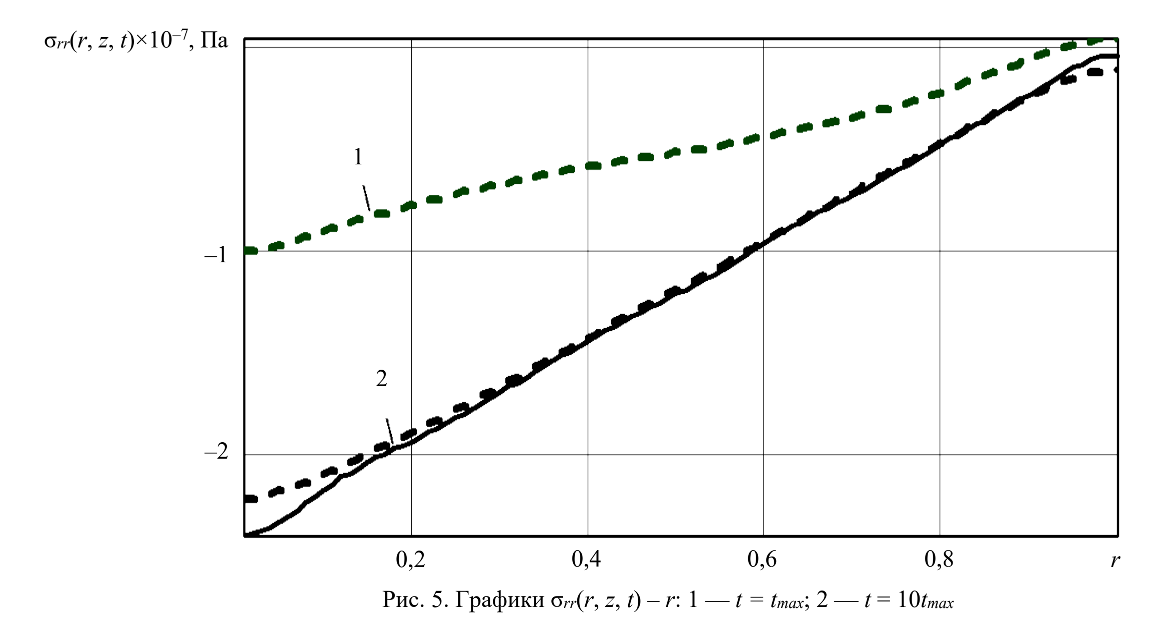


Рис. 5. Графики $\sigma_{rr}(r, z, t) - r$: 1 — $t = t_{max}$; 2 — $t = 10t_{max}$

Следует отметить, что в процессе прогрева пластина изгибается с увеличением ее толщины, за счет закрепления образуются сжимающие нормальные напряжений $\sigma_{rr}(r, z, t)$ во всех точках. В случае полного прогрева конструкции ($t = 10t_{max}$) величина нормальных напряжений $\sigma_{rr}(r, z, 10t_{max})$ по высоте сечения практически совпадают (рис. 5, график 2, сплошная и пунктирная линии). При этом $\sigma_{rr}(r, 0, t)$ остается постоянной на всем промежутке времени $t \geq t_{max}$ (рис. 5, сплошная линия), а на нижней плоскости в начальный момент времени $\sigma_{rr}(r, h, t)$ существенно меньше (рис. 5, график 1, пунктирная линия).

Для качественной оценки индуцируемого электрического импульса в виде разности потенциалов $V(t)$ (31) на верхней лицевой поверхности рассматриваемого элемента необходимо сформировать два электрода с радиусом раздела $R = 0{,}7$ и подключением их к измерительному прибору (рис. 6, сплошная линия). При этом определение $V(t)$ путем подключения верхней и нижней (заземленной) сплошных электродированных поверхностей пластины к вольтметру (рис. 6, пунктирная линия) неэффективно.

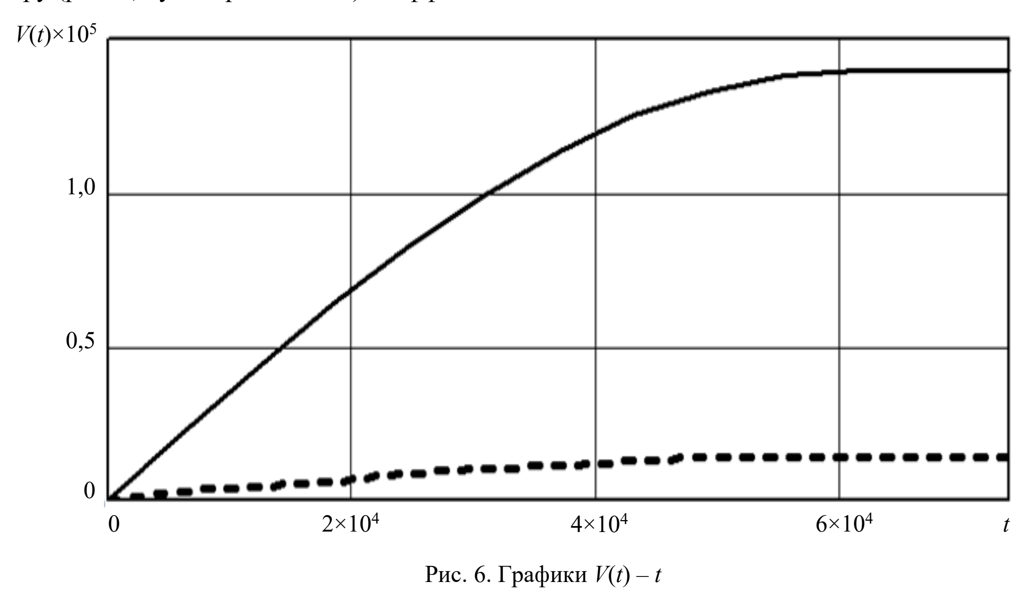


Рис. 6. Графики $V(t) - t$

Обсуждение и заключение. Разработанное замкнутое решение связанной осесимметричной задачи термоэлектроупругости для круглой пластины, выполненной из пьезокерамического материала, является более точным по сравнению с решением, которое было разработано при решении задач в несвязанной постановке. Связано это с тем, что полученные расчетные соотношения позволяют определить, как влияет на напряженно-деформированное состояние и электрическое поле рассматриваемого элемента нестационарное температурное поле, что позволяет описывать с большей точностью поведение круглой пьезокерамической пластины под действием тепловой и электрической нагрузок. Кроме того, появляется возможность научно обосновать размеры двух несвязанных между собой электродов, позволяющих наиболее эффективно измерить индуцируемый электрический импульс.

Список литературы / References

1. Ионов Б.П., Ионов А.Б. Спектрально-статистический подход к бесконтактному измерению температуры. *Датчики и системы*. 2009;(2):9–12. URL: https://rucont.ru/efd/600855(дата обращения: 30.11.2023).

Ionov BP, Ionov AB. Statistic-Spectral Approach to Noncontact Temperature Measurement. *Sensors & Systems*. 2009;117(2):9–12. URL: https://rucont.ru/efd/600855 (accessed: 30.11.2023).

2. Казарян А.А. Тонкопленочный датчик давления и температуры. *Датчики и системы*. 2016;(3):50–56. URL: https://rucont.ru/efd/579511(дата обращения: 30.11.2023).

Kazaryan AA. Fine-Film Captive Pressure and Temperature. *Sensors & Systems*. 2016;(3):50–56. URL: https://rucont.ru/efd/579511 (accessed: 30.11.2023).

3. Паньков А.А. Резонансная диагностика распределения температуры пьезоэлектролюминесцентным оптоволоконным датчиком по решению интегрального уравнения Фредгольма. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2018;(2):72–82. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.07

Pan'kov AA. Resonant Diagnostics of Temperature Distribution by the Piezo-Electro-Luminescent Fiber-Optical Sensor according to the Solution of the Fredholm Integral Equation. *PNPRU Mechanics Bulletin*. 2018;(2):72–82. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.07

4. Saadatfar M, Razavi AS. Piezoelectric Hollow Cylinder with Thermal Gradient. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2009;23:45–53. https://doi.org/10.1007/s12206-008-1002-8

5. Weiqiu Chen, Tadashi Shioya. Piezothermoelastic Behavior of a Pyroelectric Spherical Shell. *Journal Thermal Stresses*. 2001;24:105–120. http://doi.org/10.1080/014957301505004244

6. Podil'chuk YuN. Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelectroelastic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems. *International Applied Mechanics.* 2003;39(2):132–170. https://doi.org/10.1023/A:1023953313612

7. Shlyakhin DA, Kalmova MA. Uncoupled Problem of Thermoelectroelasticity for a Cylindrical Shell. In: P Akimov, N Vatin (eds). *XXX Russian-Polish-Slovak Seminar Theoretical Foundation of Civil Engineering (RSP 2021)*. Cham: Springer. 2022;189:263–271. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86001-1_31

8. Шляхин Д.А., Савинова Е.В., Юрин В.А. Динамическая задача термоэлектроупругости для круглой жестко закрепленной пластины. *Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета*. 2022;50(1):3–16. https://doi.org/10.24866/2227-6858/2022-1/3-16

Shlyakhin DA, Savinova EV, Yurin VA. Dynamic Problem of Thermoelectricity for Round Rigidly Fixed Plate. *FEFU: School of Engineering Bulletin*. 2022;50(1):3–16. https://doi.org/10.24866/2227-6858/2022-1/3-16

9. Ватульян А.О. Тепловой удар по термоэлектроупругому слою. *Вестник Донского государственного технического университета*. 2001;1(1):82–89.

Vatulyan AO. Heat Stroke on a Thermoelectroelastic Layer. *Vestnik of DSTU*. 2001;1(1):82–89. (In Russ.).

10. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Динамическая задача термоэлектроупругости для функционально-градиентного слоя. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2017;10(2):117–126. https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.10

Vatulyan AO, Nesterov SA. The Dynamic Problem of Thermoelectroelasticity for Functionally Graded Layer. *Computational Continuum Mechanics*. 2017;10(2):117–126. https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.10

11. Shang F, Kuna M, Kitamura T. Theoretical Investigation of an Elliptical Crack in Thermopiezoelectric Material. Part 1: Analytical Development. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics.* 2003;40(3):237–246. https://doi.org/10.1016/J.TAFMEC.2003.08.003

12. Kirilyuk VS. Thermostressed State of a Piezoelectric Body with a Plate Crack under Symmetric Thermal Load. *International Applied Mechanics*. 2008;44(3):320–330. http://doi.org/10.1007/s10778-008-0048-8

13. Шляхин Д.А., Кальмова М.А. Связанная нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного полого цилиндра. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*. 2020;24(4):677–691. https://doi.org/10.14498/vsgtu1781

Shlyakhin DA, Kal'mova MA. The Coupled Non-Stationary Thermo-Electro-Elasticity Problem for a Long Hollow Cylinder. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020;24(4):677–691. https://doi.org/10.14498/vsgtu1781

14. Шляхин Д.А., Кальмова М.А. Нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического цилиндра. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2021;(2):181–190. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.16

Shlyakhin DA., Kalmova MA. The Nonstationary Thermoelectric Elasticity Problem for a Long Piezoceramic Cylinder. *PNPRU Mechanics Bulletin*. 2021;(2):181–190. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.16

15. Сеницкий Ю.Э. Метод конечных интегральных преобразований — обобщение классической процедуры разложения по собственным вектор-функциям. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Математика. Механика. Информатика*. 2011;11(3–1):61–89. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-3-1-61-89

Senitsky YuE. Finite Integral Transformations Method – Generalization of Classic Procedure for Eigenvector Decomposition. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2011;11(3-1):61–89. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-3-1-61-89

16. Selvamani R. Influence of Thermo-Piezoelectric Field in a Circular Bar Subjected to Thermal Loading due to Laser Pulse. *Materials Physics and Mechanics*. 2016;27(1):1–8. URL: https://www.ipme.ru/e-journals/MPM/no_12716/MPM127_01_selvamani.pdf (accessed: 30.11.2023).

Об авторах:

Дмитрий Аверкиевич Шляхин, доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой строительной механики, инженерной геологии, основания и фундаментов Самарского государственного технического университета (443100, РФ, г. Самара ул. Молодогвардейская, 244), SPIN-код: 7802-5059, ORCID, d-612-mit2009@yandex.ru

Елена Владимировна Савинова, аспирант, старший преподаватель кафедры строительной механики, инженерной геологии, основания и фундаментов Самарского государственного технического университета (443100, РФ, г. Самара ул. Молодогвардейская, 244), SPIN-код: 7027-4822, ORCID, slenax@yandex.ru

Заявленный вклад авторов:

Д.А. Шляхин — научное руководство, формирование основной концепции, цели и задачи исследования, проведение расчетов, формирование выводов.

Е.В. Савинова — подготовка текста, анализ результатов исследования, доработка текста, корректировка выводов.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Поступила в редакцию 15.12.2023
Поступила после рецензирования 11.01.2024
Принята к публикации 18.01.2024

About the Authors:

Dmitriy A. Shlyakhin, Dr.Sci. (Eng.), Associate Professor, Head of the Structural Mechanics, Engineering Geology, Foundation Engineering Department, Samara Polytekh (244, Molodogvardeyskaya St., Samara, 443100, RF), SPIN-code: 7802-5059, ORCID, d-612-mit2009@yandex.ru

Elena V. Savinova, postgraduate student, senior lecturer of the Structural Mechanics, Engineering Geology, Foundation Engineering Department, Samara Polytekh (244, Molodogvardeyskaya St., Samara, 443100, RF), SPIN-code: 7027-4822, ORCID, slenax@yandex.ru

Claimed contributorship:

AD Shlyakhin: academic advising, basic concept formulation, research objectives and tasks, calculations, formulation of conclusions.

EV Savinova: text preparation, analysis of the research results, revision of the text, correction of the conclusions.

Conflict of interest statement: the authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final version of the manuscript.

Received 15.12.2023
Revised 11.01.2024
Accepted 18.01.2024